

# Analisi non lineare di sezioni in c.a. soggette a pressoflessione deviata

Marco Di Ludovico, Gian Piero Lignola, Andrea Prota, Edoardo Cosenza

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università degli Studi di Napoli "Federico II", Via Claudio 21, 80125 Napoli*

*Keywords: (presso flessione deviata, progetto, verifica, sezione in c.a., FRP)*

## ABSTRACT:

Il presente lavoro fornisce indicazioni sulla procedura di calcolo di sezioni in Calcestruzzo Armato (c.a.) soggette a compressione e flessione biassiale recentemente implementata dagli autori. Il metodo proposto consente di operare con sezioni di geometria qualsiasi, anche con cavità interne e diversi tipi di materiali. Sono contemplate le armature interne e di precompressione sia in acciaio che in materiali compositi (FRP), questi ultimi sia come armatura interna (barre) che esterna. Diversi legami costitutivi non lineari sono stati adoperati e molti altri personalizzati possono essere implementati tramite semplici user-defined subroutines. L'algoritmo di calcolo proposto consente la determinazione di diagrammi momento-curvatura sia fino al carico di picco che nel ramo discendente nonché di disegnare i domini di interazione tridimensionali nello spazio  $N-M_x-M_y$ .

Il campo delle tensioni è integrato numericamente dopo che la sezione è stata automaticamente suddivisa in elementi finiti rettangolari. Nel caso di sezioni soggette a presso flessione biassiale devono essere risolte due equazioni non lineari per garantire l'equilibrio e la direzione del piano di sollecitazione. Sono fornite diverse strategie per una efficiente e rapida soluzione di questo sistema fortemente non lineare così come alcune procedure iterative e criteri di convergenza. Tutte le prove numeriche eseguite hanno evidenziato una rapida convergenza dell'algoritmo. I risultati calcolati con l'algoritmo proposto sono stati confrontati con risultanti sperimentali e con risultati ricavabili con modelli reperibili in letteratura; in ogni caso è possibile trovare una buona corrispondenza.

## 1 INTRODUZIONE

Lo studio di sezioni soggette a presso flessione deviata è di particolare interesse nel caso di strutture soggette ad azioni sismiche, in quanto la presenza contemporanea di momenti flettenti secondo direzioni non principali di inerzia, riduce notevolmente la capacità delle sezioni.

Ciononostante le normative sismiche odierne spesso trascurano la complessità del problema tridimensionale a favore di una maggiore snellezza di calcolo consentendo di valutare separatamente la flessione lungo gli assi principali di inerzia con capacità arbitrariamente ridotte (per esempio l'Eurocodice 8 suggerisce di ridurre la capacità flessionale retta delle sezioni del 30% in presenza di azione biassiale). Il dominio di resistenza della sezione sottoposta a pressoflessione biassiale è rappresentabile in uno spazio tridimensionale e molti autori hanno proposto, negli ultimi anni, diversi metodi per tracciare alcune sezioni approssimate di tale

dominio di resistenza. L'uso di tali approcci semplificati, sebbene non sempre conservativo, è sempre stato giustificato dalla difficoltà di valutare manualmente la capacità biassiale delle sezioni in c.a.

Tale capacità può essere valutata integrando il campo tensionale agente sulla sezione in condizioni ultime. Nel presente lavoro è proposta una procedura per l'integrazione di tale campo tensionale, implementata in un software di calcolo automatico che consente di valutare rapidamente e accuratamente la capacità di qualsiasi sezione in c.a. soggetta a pressoflessione comunque eccentrica. La sezione in c.a. può includere armature interne e di precompressione in acciaio e in FRP sia in forma di barre interne che di laminati esterni. Per ciascun materiale sono disponibili legami costitutivi non lineari predefiniti ed impostabili dall'utente tramite semplici subroutines.

Con l'algoritmo proposto è possibile sia progettare che verificare sezioni per un prefissato valore di sforzo normale  $N$  ed eccentricità  $e$ . L'output del presente algoritmo è la determinazione sia del diagramma momento-curvatura che dell'intero dominio

di resistenza tridimensionale.

Nei paragrafi seguenti saranno riportati brevemente i modelli di calcolo disponibili in letteratura e sarà estesamente illustrato il modello proposto. Infine saranno riportati alcuni risultati di letteratura che consentiranno di validare l'algoritmo proposto.

## 2 STATO DELL'ARTE

Le procedure di calcolo inerenti la progettazione/verifica di sezioni soggette a sollecitazioni di presso flessione deviata sono iterative e richiedono una integrazione al passo delle tensioni agenti sulla sezione. Al fine di semplificare il problema, molti autori si sono proposti, negli ultimi anni, di mettere a punto metodi semplificati tesi alla individuazione di espressioni analitiche che consentissero, in via approssimata, di determinare il dominio di interazione tridimensionale o sezioni piane dello stesso. Uno dei primi metodi semplificati di cui si ha notizia in letteratura è il cosiddetto "Load Contour Method", (LC), (Bresler, 1960) attraverso il quale, fissato un determinato valore dello sforzo normale agente, la superficie limite è approssimata mediante la seguente espressione:

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^{\alpha_2} = 1 \quad (1)$$

dove  $M_x$  e  $M_y$  rappresentano il momento flettente rispetto agli assi x ed y in corrispondenza di un determinato valore dello sforzo normale, N;  $M_{x0}$  e  $M_{y0}$  rappresentano i momenti ultimi in pressoflessione retta rispetto agli stessi assi in corrispondenza di N; ed  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono esponenti che variano in funzione delle caratteristiche meccaniche e geometriche della sezione nonché del valore di sforzo normale assegnato.

Attraverso tale espressione è possibile determinare una curva che ben approssima una sezione piana del dominio tridimensionale di interazione (N- $M_x$ - $M_y$ ). La corrispondenza tra la curva approssimata e la sezione del dominio di interazione dipende fortemente dal valore assegnato ai due esponenti  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ ; in particolare, l'autore suggerisce per sezioni in c.a. quadrate o rettangolari, di usare, per entrambi gli esponenti, un unico valore compreso tra 1.15 e 1.55. Una espressione del coefficiente  $\alpha$  in grado di ben approssimare la sezione del dominio di interazione è riportata anche nell'Australian Standard AS 3600, 1988:

$$\alpha = 0.7 + \frac{1.7N}{0.6N_o} \quad (2)$$

in cui N rappresenta lo sforzo normale agente in caso di sollecitazioni biassiali e  $N_o$  rappresenta lo sforzo normale ultimo della sezione in condizioni di

sforzo normale centrato.

In seguito è stata proposta (Hsu, 1988) una modifica al metodo LC consistente nell'adottare un unico valore per gli esponenti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  pari a 1.5 ed aggiungere un nuovo termine nell'espressione (1) in modo da tenere in conto, in maniera diretta, del rapporto tra lo sforzo normale ultimo e lo sforzo normale ultimo in condizioni di rottura bilanciata:

$$\left(\frac{N - N_b}{N_o - N_b}\right) + \left(\frac{M_x}{M_{bx}}\right)^{1.5} + \left(\frac{M_y}{M_{by}}\right)^{1.5} = 1 \quad (3)$$

in cui  $N_b$  rappresenta lo sforzo normale ultimo in condizioni di rottura bilanciata nel caso di pressoflessione deviata;  $M_{bx}$  e  $M_{by}$  sono i momenti ultimi rispetto agli assi x ed y in condizioni di rottura bilanciata nel caso di presso flessione retta.

Un'ulteriore modifica al LC (Ferguson et al., 1988 e Mc Gregor, 1992) consiste nell'utilizzare la espressione (1) assumendo un unico valore per gli esponenti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  pari a 1.0 ed aggiungendo alcuni fattori moltiplicativi:

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right) + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right) \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) - 1 = 0 \text{ se } \left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right) > \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right) \quad (4-a)$$

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right) \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right) - 1 = 0 \text{ se } \left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right) \leq \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right) \quad (4-b)$$

dove  $\beta$  rappresenta un coefficiente che può assumere valori compresi tra 0 ed 1 in funzione delle proprietà geometriche e meccaniche della sezione in esame. Assumendo soltanto l'espressione (1) con  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  si ottiene un dominio di interazione di forma piramidale che nella maggior parte dei casi risulta essere troppo conservativo.

Sempre nell'ambito del metodo LC, un altro approccio sicuramente conservativo ma estremamente semplice da implementare in relazione a sezioni rettangolari (Gherzi et al., 2004) fornisce semplici formulazioni per determinare il momento ultimo in presso flessione retta da utilizzare all'interno dell'espressione (1) assumendo come valori degli esponenti  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.4 \div 1.5$ .

Espressioni in forma chiusa sono state in seguito (Monti et al. 2006) messe a punto per calibrare i coefficienti  $\alpha$  in funzione dello sforzo normale agente sulla sezione, la sua forma e la percentuale di rinforzo.

Un altro metodo approssimato, denominato "Reciprocal Load Method" (RL), (Bresler, 1960) riportato peraltro anche nelle norme americane, ACI 318, 2002, consiste nell'interpolare il dominio limite attraverso piani secanti definiti mediante tre punti appartenenti al dominio limite in caso di presso flessione retta:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_{x0}} + \frac{1}{N_{y0}} - \frac{1}{N_0} \quad (5)$$

in cui  $N_{x0}$  ed  $N_{y0}$ , rappresentano rispettivamente gli sforzi normali ultimi per una assegnata eccentricità,  $e_x$  ed  $e_y$  nel caso di presso flessione retta rispetto all'asse  $x$  ed  $y$ .

La forma del dominio di interazione ottenuto mediante l'utilizzo di tale espressione è stata validata mediante prove sperimentali condotte su pilastri rettangolari soggetti a presso flessione deviata (Ramamurthy, 1996). E', tuttavia, necessario sottolineare che altre prove sperimentali (Silva et al., 2001) hanno mostrato che, nella maggior parte dei casi analizzati, tale espressione porta alla determinazioni di superfici limite eccessivamente conservative; gli stessi autori, inoltre, hanno sottolineato la scarsa semplicità del metodo che richiede, per ciascun valore del carico assiale, la determinazione degli sforzi normali ultimi per una assegnata eccentricità,  $e_x$  ed  $e_y$  ( $N_{x0}$  ed  $N_{y0}$ ).

Nel caso di applicazioni su pilastri realizzati con calcestruzzi ad alta resistenza (Wang e Hong, 2002), inoltre, si è potuto osservare che l'espressione (5) conduce a risultati più approssimati rispetto a quelli ottenuti applicando il LC.

Oltre ai due metodi sopra menzionati, LC e RL, molti autori negli anni hanno proposto criteri alternativi per la determinazione del dominio di interazione nel caso di presso flessione deviata: è stato proposto un metodo numerico per la determinazione di punti del dominio di interazione nel caso di elementi prismatici in c.a. soggetti a sollecitazioni di presso flessione deviata (Sussekind); sono state affinate tecniche numeriche per la determinazione della capacità flessionale di elementi in c.a. soggetti a sforzo normale e flessione biassiale (Hulse e Mosley, 1986 e Spiegel e Limbrunner, 1988); è stato proposto un nuovo criterio, in cui la superficie limite è ipotizzata approssimabile attraverso una superficie chiusa convessa (Silva, 2001); è stata fornita una espressione analitica basata sulla definizione della superficie limite attraverso due curve direttrici e due curve generatrici (Bonet, 2004).

Altri autori hanno, invece, proposto algoritmi di calcolo per tenere in conto il comportamento non lineare della sezione.

Inizialmente è stato messo a punto un algoritmo per l'analisi di sezioni in c.a. capace di tenere in conto gli effetti sia dell'armatura dolce che di precompressione (Kawakami et al., 1985); l'algoritmo proposto, tuttavia, sebbene efficace, risulta difficile da implementare in un software di calcolo. Altri algoritmi di calcolo (Landonio M. et al. 1986, Contaldo M. et al., 1987) sono stati realizzati col fine specifico di determinare i momenti ultimi di sezioni in c.a. di forma qualsiasi in presso flessione deviata.

Successivamente è stato implementato (Bousias et

al., 1996) un modello capace di valutare gli incrementi di deformazioni e tensioni di sezioni sottoposte ad azioni biassiali sino al raggiungimento delle deformazioni ultime. Un ulteriore sviluppo (Sfakiakakis, 2002) si è avuto nella formulazioni di algoritmi di calcolo nel caso di sezioni in c.a di forma qualsiasi soggette a presso flessione deviata; il metodo proposto, basato su una modellazione a fibre della sezione e su procedure grafiche, non contempla l'utilizzo di procedure iterative e perciò non presenta problematiche relative alla convergenza ma, di contro, necessita di significativi tempi di elaborazione. Sempre nel campo della definizione di algoritmi di calcolo in grado di affrontare il problema della presso flessione deviata ma con particolare attenzione alla determinazione del diagramma momento-curvatura, una nuova metodologia è stata messa a punto attraverso la definizione di un programma multi-modulare (Consolatio et al., 2004)

Infine, sono stati sviluppati (De Vivo e Rosati, 1998) due algoritmi tesi alla determinazione della capacità flettente ultima di sezioni in c.a di forma qualsiasi soggette ad azioni biassiali attraverso l'adozione di metodi secanti per la soluzione del sistema di due equazioni non-lineari che governa il problema della presso flessione deviata.

E' disponibile, infine, in letteratura una vasta panoramica delle diverse metodologie basate sia sulla definizione di equazioni in grado di approssimare il dominio di interazione sia sulla messa a punto di algoritmi di calcolo, proposte nel tempo dai diversi autori che si sono occupati del problema della analisi di sezioni soggette a presso flessione deviata (Furlong et al., 2004).

### 3 ALGORITMO NUMERICO PROPOSTO

Nel presente lavoro è stato sviluppato un software di calcolo basato sulla discretizzazione in elementi finiti delle sezioni in c.a; ai fini dell'analisi, la sezione è suddivisa in elementi finiti rettangolari.

Il presente modello analitico può essere applicato a sezioni in c.a. di forma qualsiasi e caratterizzate da differenti materiali dal comportamento non lineare offrendo la possibilità di valutare sia la resistenza che la deformabilità/duttilità della sezione in esame.

#### 3.1 Ipotesi alla base del metodo

Alla base del metodo proposto vi sono le seguenti ipotesi:

- 1) Conservazione delle sezioni piane (ipotesi classica nel calcolo tecnico delle sezioni in c.a. conosciuta anche come ipotesi di Bernoulli-Navier);
- 2) I legami costitutivi non lineari dei materiali costitutivi sono noti a priori;
- 3) Le tensioni sono dipendenti dalla sola deformazione dell'elemento cosicché si trascurano gli effetti di viscosità e ritiro nel tempo;

4) Si assume perfetta aderenza alle interfacce tra calcestruzzo e acciaio (o FRP) delle armature sia interne che esterne eventualmente presenti;

5) Si assume che l'applicazione del carico e la conseguente deformazione abbiano luogo in modo monotono; in questo modo non si considera esplicitamente il comportamento sotto carico ciclico, ma questo ultimo può essere tenuto in conto adoperando opportuni legami costitutivi per i materiali.

La sezione è suddivisa in elementi finiti di dimensioni ridotte e a ciascun elemento si associa un valore medio di deformazione e tensione. L'integrazione numerica è quindi sviluppata considerando il valore di tensione e deformazione baricentrico all'elemento.

La deformazione nelle barre di armatura interna è assunta pari al valore baricentrico (non essendovi la necessità di considerare elementi finiti come nel caso del calcestruzzo poiché si assume che il diametro delle barre sia trascurabile rispetto alle dimensioni medie della sezione in c.a.).

Ragionamento simile è fatto per il rinforzo esterno in FRP. Le lamine sono considerate come linee esterne al perimetro della sezione in calcestruzzo di spessore trascurabile rispetto alle dimensioni della sezione. La deformazione è quindi assunta uniforme in ogni singolo elemento in cui è suddivisa la lamina e pari al valore baricentrico.

I principali legami costitutivi noti dalla letteratura sono stati pre-implementati (vedi Figura 1) mentre altri definiti dall'utente possono essere implementati in forma di funzione che lega univocamente alla deformazione del materiale la corrispondente tensione (legame tensione-deformazione anche non lineare con rami discendenti post-picco).

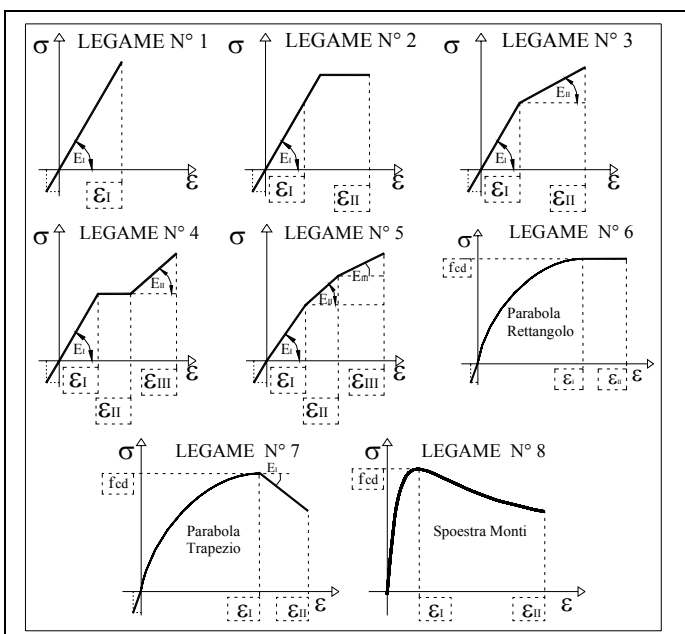


Figura 1. Legami costitutivi adoperati

I legami riportati in Figura 1 sono alcuni dei legami costitutivi implementati. Il legame costitutivo

dei compositi FRP è differente in trazione ed in compressione, in quest'ultimo caso si assume un modulo elastico molto ridotto, al limite nullo poiché gli elementi in FRP sono molto sensibili ai fenomeni di instabilità.

L'analisi dei fenomeni di debonding va oltre gli obiettivi del presente articolo, ma può essere condotta agevolmente considerando una tensione ultima del materiale pari al valore della tensione di debonding stessa.

Due condizioni sono esplicitamente considerate e sono riportate in Figura 2. Nel primo caso vi è un carico assiale applicato sulla sezione con una eccentricità predefinita: il carico assiale viene incrementato fino a rottura e quindi l'eccentricità è costante in tutta la storia di carico. Nel secondo caso si opera a carico assiale costante ed anche il rapporto tra i momenti flettenti  $M_y$  ed  $M_x$  è costante. E' questo ad esempio il caso di una pila da ponte caricata con uno sforzo normale costante ed una azione in sommità laterale di tipo sismica per cui a sforzo normale costante cresce la sola componente flessionale (secondo un piano di sollecitazione predefinito). La crisi in questo caso avviene in un piano a sforzo normale  $N$  costante quando il percorso di carico interseca la traccia della superficie limite, ovvero quando si attinge la resistenza flessionale ovvero la massima eccentricità del carico.

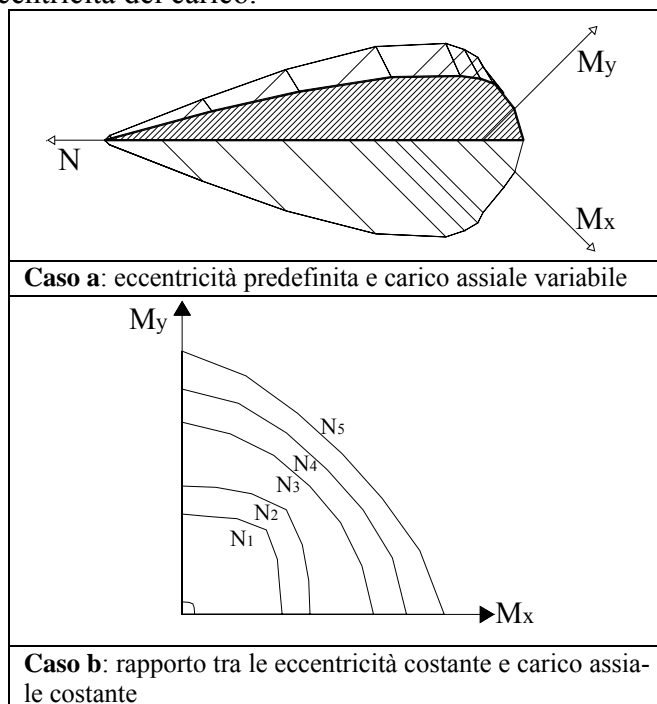


Figura 2. Tipologie di carico contemplate nell'algoritmo

La procedura di seguito descritta fa riferimento al secondo caso, ma anche il primo caso può essere semplicemente risolto dopo aver tracciato l'intero dominio di resistenza tridimensionale della sezione.

Lo sforzo normale esterno  $N_{ext}$  è costante durante la storia di carico così come la direzione dell'azione orizzontale, ovvero il centro di pressione, punto di applicazione dello sforzo normale, rimane sulla retta

di inclinazione predefinita,  $\beta_{ext.}$  passante per il baricentro dell'intera sezione (o qualsiasi altro punto definito dall'utente).

I momenti flettenti valutati con l'algoritmo proposto, così come quelli adoperati per tracciare i diagrammi momento-curvatura, sono valutati con riferimento al baricentro dell'intera sezione (o qualsiasi altro punto definito dall'utente).

### 3.2 Discretizzazione della sezione in elementi finiti

La sezione di calcestruzzo deve essere definita mediante una poligonale chiusa che delimita il perimetro con segmenti di retta; tali segmenti di retta formano sia il perimetro esterno che interno della sezione (in presenza di eventuali cavità).

I punti della sezione sono interni ad una poligonale chiusa (anche in presenza di cavità) se la somma algebrica di tutti gli angoli orientati definiti dal punto e da tutte le coppie di vertici consecutivi del perimetro è pari a  $360^\circ$ . Da ciò si evince l'importanza dell'ordine con cui i vertici sono definiti: i vertici devono essere numerati consecutivamente e in senso antiorario sul perimetro esterno, mentre quelli del perimetro interno, se presenti, devono essere numerati in senso orario (Figura 3). L'ultimo vertice è assunto coincidente con il primo per chiudere la poligonale

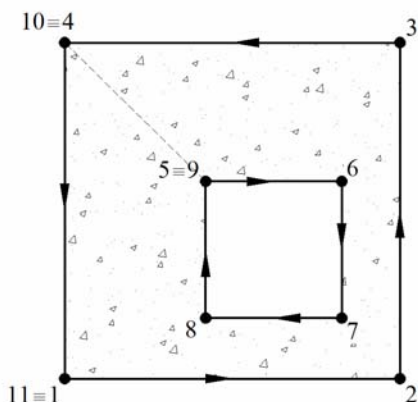


Figura 3. Definizione della poligonale di contorno alla sezione

Eventuali contorni curvilinei possono essere approssimati con una serie di segmenti. Definita la geometria della sezione è necessario suddividere la medesima in elementi finiti.

Per definire la minima area rettangolare che inviluppa la sezione di calcestruzzo considerata, si considerano le coordinate minime e massime dei vertici:  $x_{min}$ ,  $x_{max}$  e  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ . Per ottenere una suddivisione della sezione in  $n_d \times m_d$  fibre (o elementi), si deve definire una griglia di passo orizzontale  $x_{el}=(x_{max}-x_{min})/n_d$  e verticale  $y_{el}=(y_{max}-y_{min})/m_d$  (vedi Figura 4).

Dopo aver suddiviso la geometria della sezione in calcestruzzo in elementi finiti si deve attribuire ad ogni elemento un materiale una tipologia di calcestruzzo.

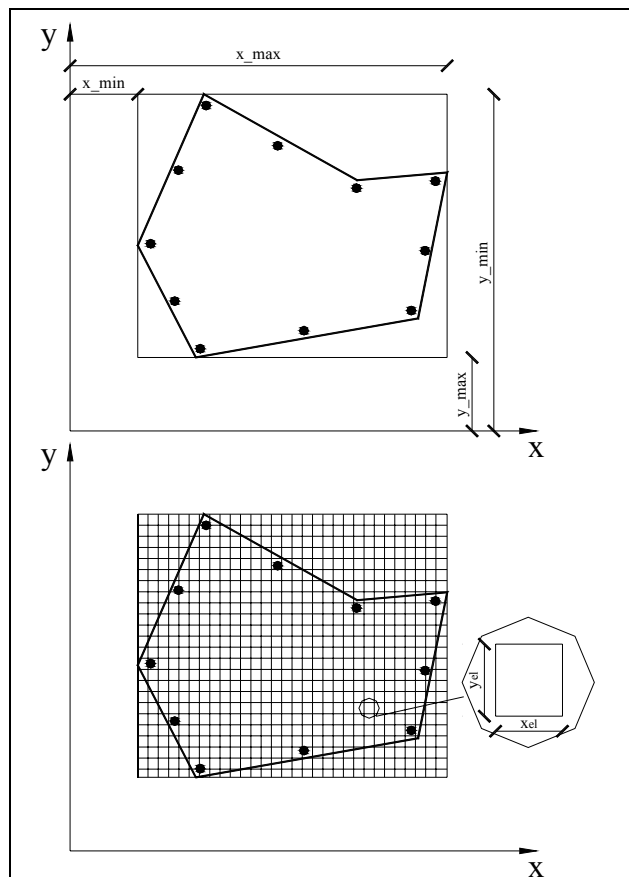


Figura 4. Discretizzazione della sezione

Se il baricentro di un elemento giace all'interno del perimetro della sezione ed è costituito dal materiale  $k$ , allora si pone il moltiplicatore del materiale  $\theta_k$  pari ad 1 (ciò significa che l'elemento appartiene alla sezione ed è considerato nei calcoli), altrimenti  $\theta_k$  è posto pari a 0 (ovvero non attivo).

Una misura della qualità della discretizzazione può essere data dal rapporto tra la somma delle superfici degli elementi finiti e l'area effettiva della sezione. L'area totale,  $A_{disc.}$  degli elementi finiti è data dalla somma delle superfici  $A_k=x_{el}y_{el}$  (uguali) degli elementi attivi (ovvero con moltiplicatore del materiale pari ad 1):  $A_{disc.}=\sum \theta_k A_k=x_{el}y_{el} \sum \theta_k$ .

L'area effettiva invece della sezione è data dall'integrale sul dominio regolare piano  $\Omega$ :

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^{\perp} \quad (6)$$

Secondo il teorema di Gauss o della divergenza, l'integrale su di un dominio piano regolare può essere trasformato nell'integrale curvilineo sul contorno del dominio e, nel caso di una poligonale chiusa (formata da  $n$  segmenti di retta) tale integrale curvilineo degenera in una sommatoria che interessa i soli vettori che identificano i vertici della sezione e i vettori ad essi ortogonali:  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}^{\perp}$ ;  $\mathbf{r}_i$  è il vettore posizione del vertice  $i$  e  $\mathbf{r}_i^{\perp}$  è il vettore ad esso ortogonale ottenuto ruotando  $\mathbf{r}_i$  di  $90^\circ$  in senso orario: se  $\mathbf{r}=(x,y)$  allora  $\mathbf{r}^{\perp}=(y,-x)$ .

Per garantire la consistenza dell'intera procedura il baricentro della sezione è calcolato a partire dalla area discretizzata in elementi finiti, piuttosto che

dall'area reale effettiva.

L'approccio esposto è molto conveniente anche per il calcolo con l'ausilio di fogli di calcolo elettronici. Ogni dato può essere raccolto in una matrice tridimensionale; ciascun elemento (o cella) della matrice bidimensionale  $n_d \times m_d$  (o livello) è riferito ad una particolare fibra (o elemento) di calcestruzzo, mentre ogni livello (la terza coordinata della matrice) si riferisce ad una particolare informazione riguardante ciascuna fibra (per esempio, la ascissa del baricentro, l'ordinata, il moltiplicatore del materiale, la distanza dalla retta dell'asse neutro, etc., vedi Figura 5).

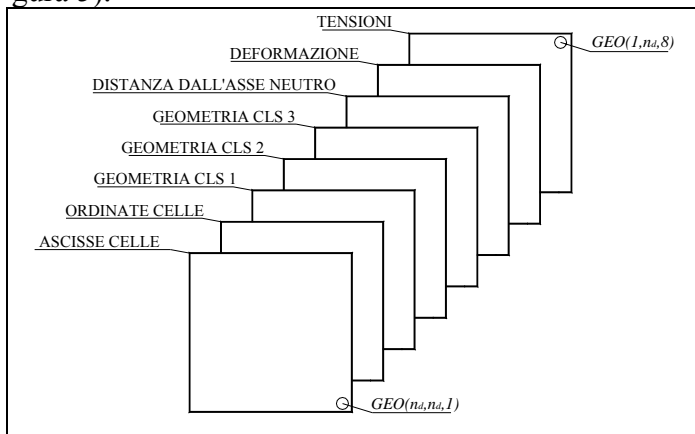


Figura 5. Matrice delle proprietà geometriche e meccaniche

Dopo aver discretizzato la sezione di calcestruzzo e definito gli elementi finiti (o fibre), si passa alla definizione di tabelle, una per ciascun tipo di armatura presente.

Le barre di acciaio o di FRP hanno dimensioni della sezione trasversale trascurabili e pertanto non sono discretizzate, ma definite dalla posizione del loro baricentro. Le armature applicate esternamente, invece, quali le lamine in FRP, sono suddivise in vari segmenti di spessore predefinito e sono trattate come elementi discreti ad area concentrata. Ciascun segmento in cui è suddivisa l'armatura esterna ha deformazione e tensione costanti. In questi casi è sufficiente adoperare una tabella per ciascuna tipologia di armatura: ciascuna riga contiene informazioni su ciascun elemento (ad esempio nella prima colonna vi è l'ascissa del baricentro di una barra, nella seconda colonna l'ordinata, quindi la distanza dall'asse neutro, e così via...).

### 3.3 L'algoritmo

Una volta che tutte le coordinate degli elementi sono state definite, è possibile valutare la distanza, ortogonale, di ciascun elemento dalla retta dell'asse neutro.

Ai fini della analisi l'asse neutro è caratterizzato da un punto, P, caratterizzante il fascio di rette cui appartiene, e da un angolo di inclinazione. Da un punto di vista strettamente di programmazione è più utile però definire le coordinate del punto P con un parametro solo: l'intercetta sull'asse y se l'angolo di

inclinazione è compreso nell'intervallo  $(-45^\circ, +45^\circ)$  o l'intercetta sull'asse x se l'angolo di inclinazione è esterno al precedente intervallo.

E' inoltre fondamentale definire, oltre alla direzione, un orientamento o verso dell'asse neutro oltre alla direzione (in quanto le distanze degli elementi da esso andranno valutate con un segno che caratterizzerà lo stato di compressione o trazione delle fibre). L'asse neutro per definizione è l'asse a deformazione nulla, così che i punti che giacciono alla stessa distanza dall'asse neutro hanno deformazione costante (isolinee) pari al valore della curvatura della sezione moltiplicato per la distanza della fibra dall'asse neutro. La convenzione dei segni adottata prevede che la deformazione degli elementi della sezione che giacciono sullo stesso semipiano definito dall'asse neutro e dal punto di applicazione dello sforzo normale esterno devono avere lo stesso segno dello sforzo normale applicato (ad esempio se il progettista assume positive le compressioni, allora lo sforzo normale di compressione esterno sarà positivo così come le deformazioni di compressione). Particolare attenzione va posta nella valutazione degli elementi di armatura da precompressione. Il valore della deformazione da considerare deve essere la somma della precompressione efficace nei cavi (prima di applicare la flessione esterna e dopo aver valutato le perdite di tensione) e l'incremento di deformazione dovuto alla flessione.

Fissato un valore della curvatura e noto il campo deformativo, è possibile valutare il campo tensionale in ciascun elemento adoperando i legami costitutivi per i materiali interessati.

La risultante interna, ovvero l'integrale del campo tensionale è dato da:

$$N_{int} = \int_{A_{disc}} \theta \cdot \sigma \, dA + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j = \sum_{i=1}^{n_d \cdot m_d} \theta_i \cdot \sigma_i \cdot A_i + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j = \quad (7)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_d \cdot m_d} N_i + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j$$

Ad ogni elemento attivo (con moltiplicatore del materiale  $\theta_i$  pari a 1) è attribuita una tensione  $\sigma_i$  uniforme, pari al valore corrispondente alla deformazione del suo baricentro;  $N_i = \theta_i \cdot A_i \cdot \sigma_i$  è la risultante di sforzo normale per l'elemento i. L'integrale è, quindi, approssimato dalla somma estesa a tutti gli elementi attivi e a tutti gli  $n_{arm}$  elementi di armatura, portando in conto in questo modo, i contributi di calcestruzzo, acciaio ed FRP.

Allo stesso modo si valuta il momento flettente, in primo luogo rispetto agli assi del sistema di riferimento:

$$M_x = \int_{A_{disc}} \theta \cdot \sigma \cdot y \, dA + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j \cdot y_j = \sum_{i=1}^{n_d \cdot m_d} \theta_i \cdot \sigma_i \cdot A_i \cdot y_i + \quad (8)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j \cdot y_j = \sum_{i=1}^{n_d \cdot m_d} N_i \cdot y_i + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j \cdot y_j$$

$$M_y = \int_{A_{disc}} \theta \cdot \sigma \cdot x \, dA + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n_d \cdot m_d} \theta_i \cdot \sigma_i \cdot A_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n_d \cdot m_d} N_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{n_{arm}} \sigma_j \cdot A_j \cdot x_j \quad (9)$$

e quindi si valuta il momento di trasporto rispetto al baricentro dell'intera sezione (o qualsiasi altro punto definito dall'utente)  $M_{x,g}$ ,  $M_{y,g}$ .

L'angolo di inclinazione del piano di sollecitazione interno emergente è quindi  $tg\beta_{int} = -M_{y,g}/M_{x,g}$ .

### 3.4 Criteri di Convergenza

Nel caso di compressione e flessione lungo un asse principale di inerzia (pressoflessione retta), le equazioni non lineari da risolvere si riducono ad una sola equazione di equilibrio: l'integrale del campo tensionale sull'intera sezione,  $N_{int}$ , associato ad un determinato asse neutro e curvatura, deve essere uguale (ovvero in equilibrio) allo sforzo normale esterno applicato,  $N_{ext}$ . Questo problema diviene generalmente non lineare superata la fase elastica lineare e può essere risolto cambiando iterativamente la profondità dell'asse neutro finché non si ottiene l'equilibrio con la condizione di convergenza generalmente posta nella forma  $|N_{int} - N_{ext}| < \text{tolleranza}$ , idonea a superare i problemi computazionali di rappresentazione digitale dei numeri (lo zero della funzione differenza potrebbe non essere rappresentabile nella precisione numerica dell'elaboratore). Il problema si ritiene quindi risolto se lo scarto (o squilibrio) tra la sollecitazione esterna applicata e lo sforzo normale emergente è minore di una quantità predefinita, in genere una percentuale dello sforzo esterno  $N_{ext}$ .

Nel caso invece di pressoflessione biassiale, il sistema di equazioni da risolvere è composto da due equazioni accoppiate nelle incognite di profondità ed inclinazione dell'asse neutro. Il criterio di convergenza dell'inclinazione dell'asse neutro può essere utilmente tradotto nella convergenza dell'inclinazione del piano della sollecitazione esterna applicata all'inclinazione del piano della sollecitazione interna emergente:  $|\beta_{int} - \beta_{ext}| < \text{tolleranza}$ . Il processo iterativo diviene ora notevolmente più complesso a causa della doppia convergenza di due equazioni non lineari accoppiate.

Tale problema può però essere risolto in due tempi adottando due procedure iterative successive.

In primo luogo si fa variare la profondità dell'asse neutro per ottenere l'equilibrio dello sforzo normale. Quindi tale procedura iterativa è ripetuta al variare della inclinazione dell'asse neutro finché non si ottiene la convergenza dell'inclinazione del piano della sollecitazione esterna applicata all'inclinazione del piano della sollecitazione interna emergente.

Lo sforzo normale esterno applicato rimane costante durante il processo di carico ed il centro di

pressione dello sforzo normale, si assume giacere sempre sulla retta appartenente al fascio di rette uscente dal baricentro della sezione con l'inclinazione prescritta  $\beta_{ext}$ .

Per ciascun valore dell'inclinazione (variabile principale) dell'asse neutro si esegue un ciclo iterativo per equilibrare lo sforzo normale (la variabile di questo ciclo iterativo innestato è la profondità dell'asse neutro). Una volta ottenuto l'equilibrio si valuta l'inclinazione del piano di sollecitazione interno emergente. La procedura si ripete fino ad ottenere la convergenza dell'inclinazione del piano di sollecitazione. La doppia procedura iterativa è rappresentata schematicamente in Figura 6.

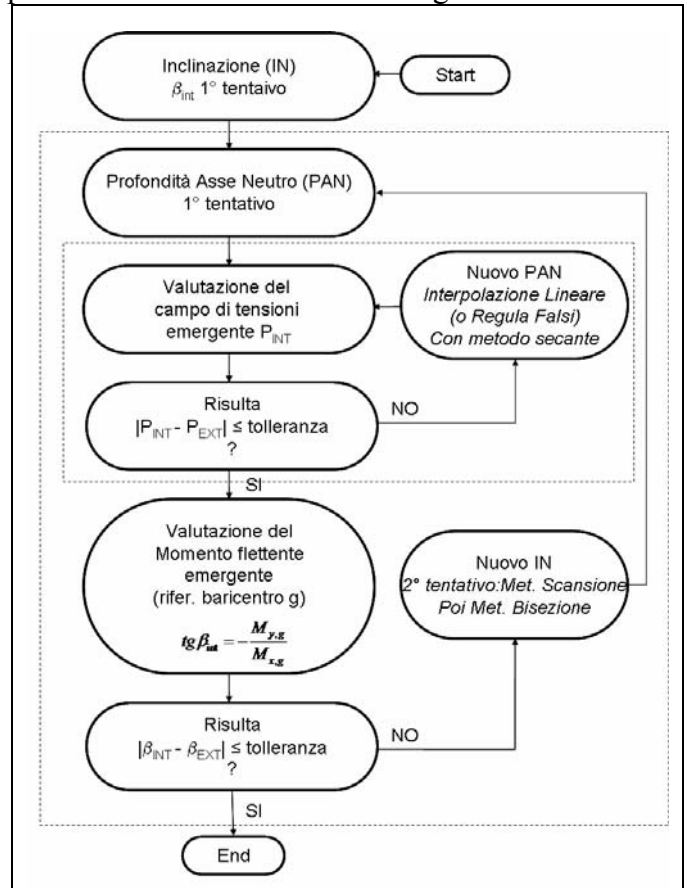


Figura 6. Diagramma di flusso schematico della procedura

A causa della elevata non linearità del problema formulato è opportuno sviluppare alcune tecniche di ottimizzazione del processo iterativo e dei criteri di convergenza per rendere più efficiente e rapida la soluzione del problema.

In primo luogo conviene tradurre il problema in forma canonica  $f(x)=0$ , per esempio  $N_{ext} - N_{int}(x)=0$ , dove  $x$  è il parametro che rappresenta la profondità dell'asse neutro. I metodi di soluzione delle equazioni non lineari del tipo  $f(x)=0$  prevedono almeno due parti: una iterazione ed un test di convergenza. Ad ogni iterazione si valuta una possibile soluzione e il test di convergenza interrompe il ciclo delle iterazioni. I criteri di convergenza sono stati già discussi, saranno ora illustrate le tecniche di iterazione.

Per risolvere il problema dell'equilibrio assiale si adotta un metodo di interpolazione lineare modifica-

to (o regula falsi) con approccio secante.

Alla base di questo metodo vi è la considerazione che la soluzione dell'equazione deve essere compresa tra due punti che forniscono valori di segno opposto della funzione continua. Appena sono disponibili tali valori  $a$  e  $b$  è possibile operare con metodi più raffinati che operano su intervalli chiusi  $[a, b]$  consentendo di approssimare la soluzione con una interpolazione lineare con una corda che connette i due valori  $f(a)$  ed  $f(b)$  di pendenza  $\phi = [f(b) - f(a)] / (b - a)$ . Tale corda interseca l'asse delle ascisse nella nuova stima della soluzione  $x_{\text{new}} = a - f(a) / \phi$ .

Questo metodo può risultare poco efficace se la derivata della funzione è molto elevata in prossimità della soluzione e quindi un estremo dell'intervallo rimane fisso e la convergenza è lenta. (vedi Figura 7).

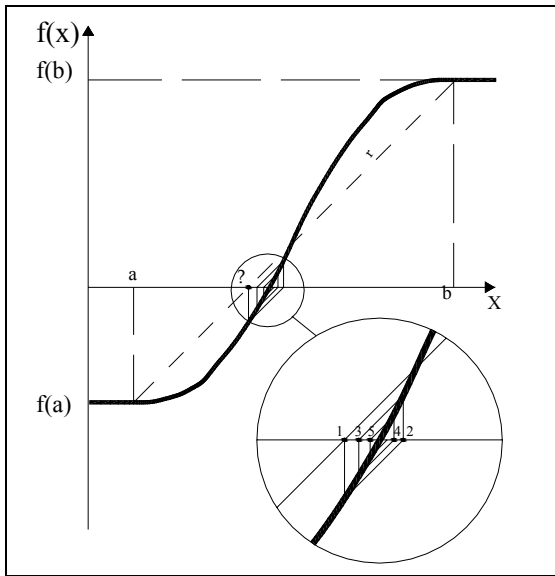


Figura 7. Regula falsi con approccio secante

Per evitare ciò si può procedere con il metodo di Newton modificato che non prevede la valutazione della pendenza  $\phi$  ad ogni passo e quindi non diverge se ad un passo la derivata si annulla. Si adotta sempre la pendenza della corda valutata al primo tentativo e se la convergenza è ancora lenta si può ridurre la pendenza. Per valutare i primi due valori di tentativo della soluzione si possono considerare le due rette limite tangenti la sezione in due punti estremi (Figura 8): in modo che nel primo caso la sezione risulta tutta tesa (a) e nel secondo tutta compressa (b).

Il metodo proposto nella sua forma classica opera su intervalli chiusi, in modo che la soluzione si suppone sia sempre compresa tra i due valori limite. Questa limitazione può essere superata se si valuta in ogni caso la pendenza  $\phi$  al primo passo e poi si adotta il medesimo valore anche per valutare la soluzione al di fuori dell'intervallo iniziale. Tale metodo è stato adottato nel codice di calcolo implementato.

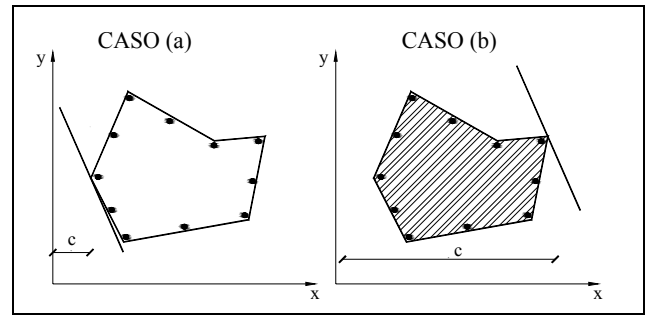


Figura 8. Posizioni limite dell'asse neutro.

Il problema invece della ricerca dell'inclinazione dell'asse neutro è sempre un problema definito in un intervallo chiuso in quanto tale intervallo è sempre minore di  $180^\circ$  poiché l'asse neutro ai fini della soluzione è coincidente (anche se con verso opposto) se lo si ruota di  $180^\circ$ . Diversi sono i metodi che consentono di risolvere tale tipo di problema in un dominio limitato: si cercherà ora di individuare quello che velocizza la soluzione del problema in esame. Come primo tentativo si può adoperare una inclinazione dell'asse neutro ortogonale all'inclinazione del piano di sollecitazione. La soluzione del problema può essere ricercata intorno a tale posizione e quindi valutare la funzione in passi successivi avvicinandosi alla soluzione per valori decrescenti della funzione e interrompendo la ricerca quando la funzione cambia segno. Questo semplice metodo di scansione può però risultare alquanto lento, anche se una stima più raffinata del primo valore di tentativo può essere l'inclinazione dell'asse neutro valutato in campo elastico lineare.

Un metodo certamente più rapido può essere il metodo della bisezione che ad ogni passo dimezza l'intervallo di ricerca preservando la metà in cui si osserva una inversione di segno della funzione agli estremi. Un interessante vantaggio di tale metodo è la conoscenza a priori del numero di iterazioni da eseguire  $n = \log_2 \varepsilon_0 / \varepsilon$  per ottenere una predefinita tolleranza  $\varepsilon$  sulla soluzione partendo da un intervallo di dimensione  $\varepsilon_0$  (certamente minore di  $180^\circ$ ).

Quando l'intervallo di ricerca della soluzione è stato ridotto opportunamente, allora è possibile proseguire con uno dei metodi proposti in precedenza per aumentare la precisione della soluzione trovata.

In particolare, nel codice di calcolo presentato si è adottata tale seconda metodologia.

## 4 STRATEGIE NUMERICHE

In assenza di coefficienti parziali di sicurezza per le proprietà meccaniche dei materiali, le equazioni trovate devono considerarsi rappresentative del fenomeno fisico e non equazioni di progetto.

### 4.1 Analisi di momento e Curvatura

Per tracciare il digramma momento-curvatura è



necessaria una procedura rapida di soluzione del sistema di equazioni non lineari poiché il problema della doppia convergenza deve essere risolto ripetutamente per ogni valore della curvatura considerato. Per valutare il digramma momento-curvatura si può far incrementare la deformazione nell'elemento più compresso della sezione da un valore iniziale (ad esempio zero) fino ad un valore ultimo. Questa procedura può però comportare un errore in esecuzione se lo sforzo normale esterno applicato causa, prima ancora della applicazione della flessione, ovvero della curvatura, una deformazione nella fibra più sollecitata superiore al valore iniziale della deformazione imposta. Un aspetto chiave del presente lavoro riguarda il superamento di questo problema: si esegue una iniziale analisi per compressione centrata e quindi si valuta la deformazione massima nel calcestruzzo e la si assume come valore iniziale, quindi si procede per incrementi costanti di deformazione fino all'attingimento della crisi del calcestruzzo in funzione dei legami costitutivi adoperati. Questo aspetto è fondamentale poiché la curvatura da sola non è sufficiente a caratterizzare il comportamento della sezione. A parità di curvatura, ma per una differente deformazione massima, lo sforzo normale applicato può essere, infatti, marcatamente diverso. Per elevati valori di sforzo normale applicato le deformazioni nel calcestruzzo hanno un minimo margine per incrementarsi così come minima è la capacità flessione che ci si può attendere.

La procedura descritta permette di valutare l'effetto della rottura dei cavi di precompressione, della delaminazione degli FRP, etc in maniera automatica. Se i legami costitutivi sono, in ogni caso, considerati ed implementati come funzioni scalino, ovvero se si assume che la tensione si annulli al superamento della deformazione ultima, allora si ha la esclusione automatica dalla integrazione delle tensioni degli elementi che attingono la rottura (ovvero che attingono deformazioni superiori al valore di rottura assunto).

A titolo esemplificativo si riportano, con riferimento ad una sezione in c.a. ad L (vedi Figura 9) con ali asimmetriche di dimensioni 300x500 mm, armata con 4 barre  $\Phi 12$  (tensione di snervamento di progetto  $f_{yd} = 278$  MPa) rinforzata al lembo superiore con 2 strati unidirezionali di tessuti in composito fibrorinforzato (spessore di 0,16 mm, modulo elastico  $E_f = 390$  GPa, deformazione ultima  $\epsilon_{fu} = 1.67\%$  e deformazione di progetto,  $\epsilon_{ffd} = 3,0\%$ ) i diagrammi momento-curvatura con riferimento a due diversi legami costitutivi del calcestruzzo (vedi Figura 10).

In particolare, la curva (a) è riferita ad un legame tensione-deformazione parabola rettangolo (resistenza di progetto a compressione  $f_{cd} = 13.28$  MPa, deformazione ultima  $\epsilon_{cu} = 5.5\%$ ), mentre la curva (b) fa riferimento ad un legame caratterizzato dalla presenza di un ramo di softening post-picco (modulo elastico tratto di softening  $E_{c2} = -3000$  MPa, deforma-

zione ultima  $\epsilon_{cu} = 8.5\%$ )

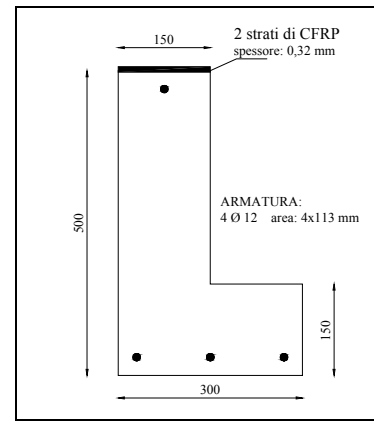


Figura 9. Sezione ad L

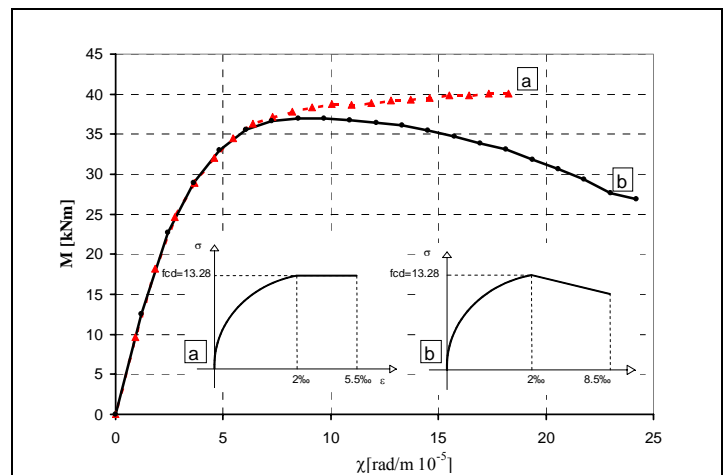


Figura 10. Sezioni piane ( $M_x$ - $M_y$ ) del dominio di interazione

#### 4.2 Domini di resistenza

La valutazione del dominio di resistenza può essere eseguita in maniera molto più rapida poiché non vi è strettamente la necessità di ottenere la convergenza per prefissati valori dell'inclinazione del piano di sollecitazione in quanto il dominio è rappresentativo di un fascio di piani di sollecitazione ad inclinazione comunque variabile. E' quindi sufficiente far variare la sola profondità dell'asse neutro per garantire l'equilibrio tra lo sforzo normale esterno applicato e quello emergente interno e ripetere la procedura per differenti valori della inclinazione dell'asse neutro. In questo modo si valuta una sezione del dominio tridimensionale a sforzo normale,  $N$  costante. Una maniera ancora più rapida di operare, la quale però non consente di definire a priori una risoluzione dei punti del dominio di resistenza consentendo di valutare per prefissate profondità e inclinazioni dell'asse neutro la capacità della sezione. In questo modo si determinano punti ovunque dispersi sulla superficie (nello spazio  $N$ - $M_x$ - $M_y$ ) del dominio di resistenza in quanto si valuta la sezione per valori di sforzo normale esterno e di inclinazione del piano di sollecitazione casuali. Un ultimo aspetto da valutare è la determinazione della curvatura e del momento ultimi. Prefissati una profondità dell'asse neutro ed

un'inclinazione, si identifica per ciascun materiale la fibra più distante dall'asse neutro e per essa si valuta la deformazione massima. In presenza di legami costitutivi con softening, quando si attinge la deformazione ultima in un materiale non si ha necessariamente anche l'attingimento del momento massimo. Il valore del momento massimo quindi non può essere valutato in concomitanza del raggiungimento della deformazione ultima nei materiali (ad esempio nel calcestruzzo), poiché in presenza di softening è necessario tracciare completamente il diagramma momento-curvatura e solo dopo ricercare il valore di momento massimo, anche se questo procedimento incrementa notevolmente i tempi di elaborazione per il dominio di resistenza.

A titolo esemplificativo si riportano, con riferimento alla sezione ad L rappresentata in Figura 8, le sezioni piane del dominio di interazione ottenute in corrispondenza di diversi valori di sforzo normale adimensionalizzato,  $v = N/N_u$  (vedi Figura 11).

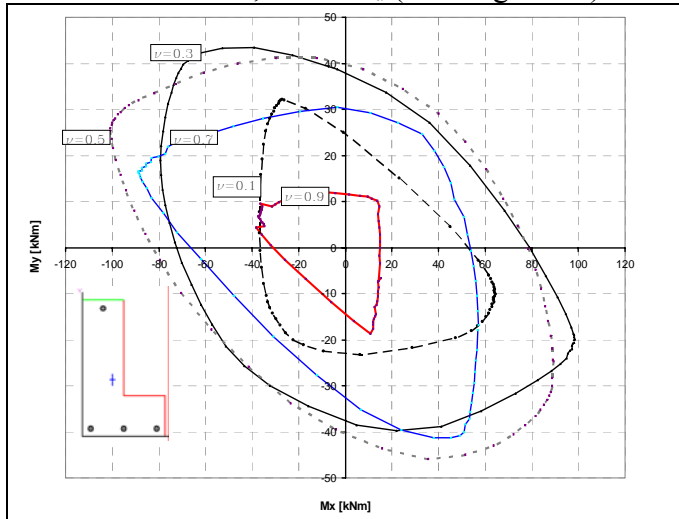


Figura 11. Sezioni piane ( $M_x$ - $M_y$ ) del dominio di interazione per la sezione di figura 8

Analogamente in Figura 12, si riportano, con riferimento ad una sezione simmetrica (quadrata in c.a. con lato di 250 mm, armata nei vertici con 4 barre  $\Phi 12$  con tensione di snervamento di calcolo  $f_{yd} = 278$  MPa e resistenza a compressione di calcolo del calcestruzzo pari a  $f_{cd} = 13.28$  MPa) le sezioni piane (a  $v = \text{cost.}$ ) del dominio di interazione

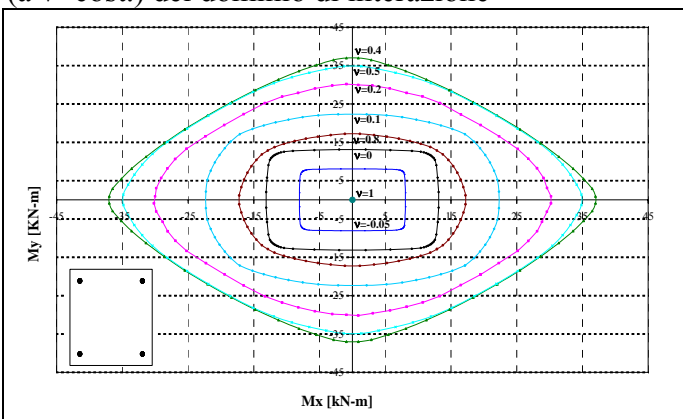


Figura 11. Sezioni piane ( $M_x$ - $M_y$ ) del dominio di interazione

### 4.3 Validazione del modello mediante confronto con i risultati disponibili in letteratura

L'affidabilità dell'algoritmo sviluppato è stata valutata attraverso comparazioni con i dati sperimentali disponibili in letteratura. In particolare, si è proceduto ad una comparazione con i risultati sperimentali derivanti da prove effettuate su elementi strutturali con sezione quadrata e rettangolare (Hsu, 1988, Bresler, 1960 e Ramamurthy, 1966). I risultati di tali comparazioni sono riportati in Tabella 1; con riferimento alle prove effettuate da ciascun autore sono riportati nelle colonne della tabella sia i dati di input (geometria della sezione, percentuale di armatura,  $\rho_g$ , tensione di snervamento e modulo elastico dell'acciaio,  $f_y$  ed  $E_s$ , resistenza cilindrica del calcestruzzo,  $f'_c$ , eccentricità rispetto all'asse x ed y,  $e_x$  ed  $e_y$ , sforzo assiale, N) sia i risultati sperimentali e teorici in termini di momenti ultimi rispetto agli assi x ed y,  $M_x$  e  $M_y$ . Nell'ultima colonna sono, inoltre, riportate le differenze riscontrate in percentuale tra i valori sperimentali e quelli teorici; si sottolinea, tuttavia, che tale comparazione può essere affetta da molteplici incertezze relative alle effettive caratteristiche dei materiali utilizzati durante le prove sperimentali ed alla modalità di prova stessa. Dalla Tabella 1 si evince che, nel caso di sezioni quadrate, lo scarto percentuale varia da un valore minimo pari a 0.27% ad un valore massimo pari a 22.96% con una differenza media percentuale pari a 5.79% e 5.68%, per  $M_x$  e  $M_y$ , rispettivamente. Si sottolinea che, in tutti i casi analizzati di sezione quadrata, il valore dello sforzo normale agente durante la prova è sempre di gran lunga inferiore (mediamente circa il 10%) allo sforzo normale centrato ultimo della sezione. Un'altrettanto buona correlazione tra dati teorici e sperimentali si evince dai risultati relativi alle prove effettuate su sezioni rettangolari: lo scarto percentuale varia da un valore minimo pari a 0.40% ad un valore massimo pari a 16.39% con una differenza media percentuale pari a 11.0% e 10.79%, per  $M_x$  e  $M_y$ , rispettivamente.

## 5 CONCLUSIONI

Il presente lavoro illustra un algoritmo di calcolo automatizzabile per l'analisi non lineare di sezioni in c.a. e c.a.p. di forma arbitraria, mono e pluriconnesse, soggette a sollecitazioni di pressoflessione retta o deviata. Il metodo presentato è rivolto anche al caso di sezioni in cemento armato rinforzate mediante l'utilizzo di materiali compositi sia nella forma di barre interne che in quella di tessuti applicati esternamente.

Tabella 1. Comparazione risultati sperimentali ottenuti su sezioni quadrate e rettangolari con risultati ottenuti mediante algoritmo sviluppato.

Aut.	Test	bxh	$\rho_g$	$E_s$	$f_v$	$f'_c$	$e_x$	$e_v$	N	$M_x$		$M_y$		Differenza $\Delta$ (%)	
		m	%	[kN/m <sup>2</sup> ]	[kN/m <sup>2</sup> ]	[kN/m <sup>2</sup> ]	m	m	kN	kN	kN	kN	%	%	
										SPER.:	TEOR.	SPER.:	TEOR.	$M_x$	$M_y$
Hsu, 1988	U1	0.102x0.102	2.81	201334	503335	26925	0,064	0,089	42,70	2,71	2,60	3,80	3,64	4,11	4,11
	U2	0.102x0.102	2.81	201334	503335	26242	0,076	0,089	38,7	2,95	2,88	3,44	3,37	2,34	2,05
	U3	0.102x0.102	2.81	201334	503335	26849	0,089	0,089	35,59	3,16	3,15	3,16	3,15	0,44	0,44
	U4	0.102x0.102	2.81	201334	503335	26408	0,051	0,051	63,61	3,23	3,24	3,23	3,24	0,27	0,27
	U5	0.102x0.102	2.81	201334	503335	25615	0,013	0,140	48,04	0,61	0,47	6,71	5,2	22,96	22,52
	U6	0.102x0.102	2.81	201334	503335	26856	0,013	0,178	27,76	0,35	0,36	4,94	5,07	2,11	2,72
Hsu, 1988	H1	0.108x0.108	4.87	199955	306828	24443	0,076	0,051	61,83	4,71	4,82	3,14	3,21	2,30	2,20
	H2	0.108x0.108	4.87	199955	306828	26780	0,083	0,057	52,49	4,33	4,93	3,00	3,42	13,78	14,01
	H3	0.108x0.108	4.87	199955	306828	29145	0,064	0,076	60,50	3,84	3,99	4,61	4,78	3,86	3,69
Hsu, 1988	S1	0.102x0.102	2.75	199955	306828	22064	0,025	0,038	93,41	2,37	3,56	2,55	3,78	7,48	6,21
	S2	0.102x0.102	2.75	199955	306828	28235	0,025	0,038	110,32	2,80	4,20	2,89	4,34	3,14	3,25
Rama- murthy, 1966	B1	0.203x0.203	3.88	206850	322617	29166	0,021	0,079	628,97	13,23	13,15	49,38	48,73	0,61	1,32
	B2	0.203x0.203	3.88	206850	322617	25753	0,019	0,047	771,77	14,98	14,89	36,23	36,15	0,58	0,21
	B3	0.203x0.203	3.88	206850	322617	33510	0,051	0,088	533,79	27,12	25,56	46,97	44,33	5,74	5,61
	B4	0.203x0.203	3.88	206850	322617	31958	0,064	0,110	395,89	25,14	24,11	43,54	41,87	4,09	3,84
	B5	0.203x0.203	3.88	206850	322617	19340	0,036	0,036	598,29	21,49	25,68	21,49	25,54	19,51	18,86
	B6	0.203x0.203	3.88	206850	322617	27552	0,065	0,065	500,42	32,36	32,65	32,36	32,61	0,91	0,78
	B7	0.203x0.203	3.88	206850	322617	29476	0,072	0,072	515,99	37,07	33,92	37,07	33,87	8,50	8,63
	B8	0.203x0.203	3.88	206850	322617	34130	0,102	0,102	369,74	37,57	34,81	37,57	34,85	7,33	7,23
<b>Media</b>														<b>5,79</b>	<b>5,68</b>
Bresler -1960	B5	0.152x0.203	2.58	206850	368883	22064	0,076	0,102	142,34	14,37	14,47	10,81	10,85	0,7	0,4
	B6	0.152x0.203	2.58	206850	368883	25512	0,152	0,203	75,62	15,37	14,98	11,52	11,30	2,51	1,91
	B7	0.152x0.203	2.58	206850	368883	24133	0,152	0,102	93,41	9,49	9,21	14,23	13,78	2,95	3,16
	B8	0.152x0.203	2.58	206850	368883	24822	0,076	0,203	106,76	21,69	21,26	8,13	7,92	1,98	2,58
Rama- murthy, 1966	D1	0.152x0.229	4.59	206850	322617	31648	0,025	0,038	785,11	19,92	20,45	29,04	29,86	2,68	2,76
	D2	0.152x0.229	4.59	206850	322617	25443	0,056	0,084	400,34	22,31	20,35	31,78	33,84	8,78	6,09
	D3	0.152x0.229	4.59	206850	322617	24450	0,076	0,114	311,38	23,66	21,07	32,09	35,53	10,95	9,69
	D4	0.152x0.229	4.59	206850	322617	25132	0,032	0,032	680,58	22,00	23,13	23,08	22,00	5,12	4,90
	D5	0.152x0.229	4.59	206850	322617	30903	0,081	0,081	378,10	30,56	25,55	25,6	30,56	16,39	16,23
	D6	0.152x0.229	4.59	206850	322617	23891	0,079	0,046	400,34	31,70	34,83	19,77	18,30	9,86	8,01
<b>Media</b>														<b>11</b>	<b>10,79</b>

L'algoritmo di calcolo, basato su una discretizzazione "a fibre" della sezione, consente la determinazione dei momenti ultimi di un'assegnata sezione in regime di pressoflessione deviata, del dominio di interazione  $N-M_x-M_y$  nonché del diagramma momento-curvatura consentendo di modellare il comportamento dei materiali attraverso diversi legami costitutivi non lineari anche con rami di softening.

L'affidabilità dell'algoritmo sviluppato è stata valutata sia mediante prove numeriche che attraverso comparazioni con i dati sperimentali disponibili in letteratura. Le prime hanno evidenziato una buona velocità di convergenza dell'algoritmo sviluppato, dalle seconde, invece, si è desunta una buona correlazione con i risultati sperimentali esistenti.

Il software di calcolo implementato, corredato di un manuale esplicativo, è disponibile e scaricabile gratuitamente dal sito <http://www.reluis.it> (sezione Divulgazione, Progettazione, Software: <http://reluis.rdm-web.com/pagine/Software.htm>).

## RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare l'ing. Ivano Iovinella per il lavoro svolto durante la sua tesi di laurea in relazione all'argomento in oggetto.

Il presente lavoro è stato sviluppato nell'ambito delle attività di ricerca della "Rete dei Laboratori Universitari di Ingegneria Sismica – ReLUIS" finanziato dal Dipartimento di Protezione Civile – Progetto Esecutivo 2005-2008.

## BIBLIOGRAFIA

- ACI Committee 318, "Building Code requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (318R-02)", American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 2002, 443 pp.
- Bonet, J.L., Miguel, P.F., Fernandez, M.A. and Romero, M.L., "Analytical Approach to Failure Surfaces in Reinforced Concrete Sections Subjected to Axial Loads and Biaxial Bending", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 130, No. 12, December 1, 2004.
- Bousias SN, Panagiotakos TB, Fardis MN., "Modelling of RC members under cyclic biaxial flexure and axial force" *Journal of Earthquake Engineering*, Vol. 6, No. 2, 1996, pp. 711-725.
- Bresler, B. "Design Criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending", *Journal of the American Concrete Institute*, Farmington Hills, Mi, November 1960, pp. 481-490.
- Consolazio, G.R., Fung, J., Ansley, M., "M- $\Phi$ -P Diagrams for Concrete Sections Under Biaxial Flexure and Axial Compression", *ACI Structural Journal*, V.101, No. 1, February 2004, pp. 114-123
- Contaldo M. e Faella G, "Un Procedimento per il calcolo Automatico delle Sezioni in c.a.", *Giornale del Genio Civile* 10 (1987), 23-37.
- De Vivo, L., Rosati, L., "Ultimate Strength Analysis of Reinforced Concrete Sections Subject to Axial Force and Biaxial Bending", *Compu. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 166, 1998, pp. 261-287.
- European Standard, EN 1998-1, 2003, Eurocode 8 "Design of Structures for Earthquake Resistance", Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings, Final Draft December 2003, Brussels.
- Ferguson, P.M., Breen, J.E. and Jirsa, J.O., *Reinforced Concrete Fundamentals*, 5th edition, John Wiley & Sons, New York, 1988, 746 pp.
- Furlong R.W., Cheng-Tzu, T.H., Mirza, S.A; "Analysis and Design of Concrete Columns for Biaxial Bending-Overview", *ACI Journal*, Proceedings, V. 101 No. 3, May-June 2004, pp. 413-423.
- Gherzi, A., Muratore, M., "Verifica e progetto allo stato limite ultimo di pilastri in c.a. a sezione rettangolare: un metodo semplificato", *Ingegneria Sismica*, Anno XXI, N. 3, settembre-dicembre 2004.
- Hsu, C.T.T. "Analysis and design of square and rectangular Columns by Equation of Failure Surface", *ACI Structural Journal*, V. 85, No. 2, Mar.-Apr. 1988, pp. 167-179.
- Hsu, C.T.T., "Channel Shaped Reinforced Concrete Compression Members under Biaxial Bending", *ACI Structural Journal*, May-June, 1987
- Hulse, R., and Mosley, W.H., "Reinforced concrete design by computer", Macmillan Education Ltd., New York, 1986.
- Kawakami MT, Kagaya M., Hirata M., "Limit states of cracking and ultimate strength of arbitrary cross sections under biaxial loading", *ACI Journal*, V. 82 No. 1, 1985, pp. 203-212.
- Landonio M. e Perego R., "Un Metodo Generale per il Calcolo Automatico allo Stato Limite Ultimo di Sezioni in c.a. soggette a Presso flessione Deviate", *La Prefabbricazione*, 2 (3), 1986.
- Monti G., Alessandri S., "Assessment of RC Columns Under Combined Biaxial Bending and Axial Load", Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Congress, June 5-8, 2006, Naples, Italy.
- Mc Gregor, J.G., "Reinforced Concrete, Mechanics and Design", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1992.
- Ramamurthy, L.N., "Investigation of the Ultimate Strength of Square and rectangular Columns Under Biaxially Eccentric Loads", *Reinforced Concrete Columns, SP-13*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 1966, pp. 263-298.
- Sfakianakis M.G., "Biaxial Bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics", *Advanced in Engineering Software* 33 (2002), 227-242.
- Silva, M.A., Swan, C.C., Arora, J.S., and R.M.L.R.F., "Failure Criterion for RC members under biaxial bending and axial load", *Journal of Structural Engineering*, 127(8), 2001, pp. 922-929.
- Spiegel, L., and Limbrunner, G.F., "Reinforced concrete design", Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1988.
- Standards Association of Australia, "Concrete Structures AS 3600-1988", North Sydney, N.S.W., Australia, 1988 105 pp.
- Sussekund, J.C., "Curso de concreto", Editora Globo, Rio de Janeiro, Brazil (in Portuguese).
- Wang, W. and Hong, H.P., "Appraisal of reciprocal load method for reinforced concrete columns of normal and high strength concrete", *Journal of Structural Engineering*, 128(11), 2002, pp. 1480-1486.