

DOMINI DI CURVATURA DI SEZIONI IN C.A. IN PRESSOFLESSIONE DEVIATA. PARTE I: ANALISI A FIBRE

¹Di Ludovico M., ¹Verderame G.M., ¹Iovinella I., ¹Cosenza E.

¹ *Dipartimento di Ingegneria Strutturale (DIST), Università di Napoli Federico II, via Claudio 21, 80125, Napoli.*

ABSTRACT

Numerosi studi sono stati condotti al fine di valutare in via rigorosa, attraverso l'adozione di modelli a fibre, ovvero mediante semplici espressioni matematiche, la capacità resistente di sezioni in cemento armato soggette a presso flessione deviata; carenti risultano, invece, gli studi mirati alla valutazione della capacità deformativa di sezioni in c.a. soggette a pressoflessione deviata. A valle della messa a punto di un software di calcolo a fibre specificatamente mirato all'analisi di sezioni in cemento armato, di forma qualsiasi, soggette ad azioni di presso flessione deviata, la presente memoria mira, pertanto, alla valutazione dell'influenza di azioni biassiali nei confronti della curvatura ultima. In particolare, tale influenza è stata analizzata con riferimento a sezioni quadrate utilizzando come parametri variabili la percentuale di armatura geometrica e la sua distribuzione, le proprietà meccaniche di acciaio e calcestruzzo ed il carico assiale adimensionalizzato. Nella presente memoria si discutono i risultati di uno studio preliminare condotto al fine di: a) illustrare i domini di curvatura in presso flessione retta e deviata relativi alle sezioni analizzate, con particolare attenzione all'influenza prodotta dalla variazione del carico assiale adimensionalizzato e dell'angolo di sollecitazione esterna (parte I); b) mettere a punto formulazioni semplificate per la determinazione approssimata di domini di curvatura ultima in pressoflessione retta e deviata (parte II).

PAROLE CHIAVE

sezioni in c.a., curvatura ultima, presso flessione deviata, dominio di curvature.

1 INTRODUZIONE

Lo studio di sezioni soggette a presso flessione deviata è di particolare interesse nel caso di strutture soggette ad azioni sismiche, in quanto la presenza contemporanea di momenti flettenti secondo direzioni non principali di inerzia, riduce notevolmente la capacità resistente e deformativa della sezione. Molteplici studi sono stati condotti negli ultimi decenni al fine di valutare in via approssimata o rigorosa la capacità resistente di sezioni in cemento armato (c.a.) soggette ad azioni di presso flessione deviata. Tuttavia, ancora limitati sono gli studi inerenti la riduzione di capacità deformativa di una sezione soggetta ad azioni biassiali nonostante sia evidente che in caso di evento sismico la nascita negli elementi strutturali, in particolar modo nei pilastri, di sollecitazioni di presso flessione deviata induca una capacità di

spostamento globale della struttura che può risultare anche sensibilmente inferiore alle attese. E' noto che lo studio di strutture in c.a., esistenti o di nuova progettazione, soggette ad azioni gravitazionali e sismiche può essere effettuato attraverso un'analisi statica non lineare che individua nella valutazione dello spostamento di un punto di controllo il parametro di riferimento per valutare la capacità sismica della struttura in esame. Nel caso in cui si utilizzi una modellazione a plasticità concentrata, la valutazione della capacità sismica della struttura viene effettuata immaginando il comportamento non lineare degli elementi che costituiscono la struttura (travi e pilastri) concentrato negli estremi degli stessi in cui si ipotizza la formazione delle cosiddette cerniere plastiche. La caratterizzazione delle cerniere plastiche non può prescindere dalla definizione del legame momento rotazione che può essere effettuata una volta noti i parametri statici momento di snervamento ed ultimo e le corrispondenti rotazioni. I valori di rotazione di snervamento ed ultima sono a loro volta correlati alla curvatura di snervamento ed ultima delle sezioni di estremità degli elementi della struttura in cui appunto si immagina concentrato il comportamento non lineare dell'elemento. Le più recenti normative sismiche (OPCM 3274, 2005 ed il D.M. 14/01/08, 2008), tuttavia, non forniscono indicazioni per la valutazione della curvatura ultima nel caso di sollecitazione biassiale, per cui il calcolo della rotazione viene generalmente effettuato computando il contributo deformativo legato alla curvatura della sezione in funzione di una sollecitazione di presso flessione retta.

La presente memoria, pertanto, mira alla valutazione dell'incidenza di azioni biassiali sulla curvatura ultima di sezioni in c.a., con particolare riferimento a sezioni quadrate caratterizzate da dimensioni e caratteristiche meccaniche dei materiali proprie degli elementi di edifici esistenti, illustrando l'andamento dei domini di curvatura ultima ed al contempo analizzando la riduzione percentuale della stessa nel passaggio da azioni di presso flessione retta a deviata.

2 DOMINI DI CURVATURA ULTIMA IN PRESSO FLESSIONE DEVIATA

Lo studio del comportamento delle sezioni pressoinflesse dal punto di vista deformativo non è stato sinora sviluppato quanto quello relativo alle resistenze. Tuttavia, tale approccio diventa essenziale alla luce degli attuali metodi di analisi strutturale nei quali la definizione della curvatura ultima delle sezioni è un passaggio obbligato per la valutazione della capacità sismica di una struttura.

Lo studio del comportamento deformativo della sezione può essere condotto in maniera analoga allo studio delle resistenze costruendo un "dominio di curvature", ossia la curva che individua tutte le coppie di valori ϕ_x , ϕ_y (componenti rispetto agli assi coordinati della curvatura ultima, $\phi_{ult.}$) alle quali corrisponde la crisi convenzionale della sezione individuata dall'attingimento della deformazione ultima del calcestruzzo. Tali componenti vengono calcolate a partire dal valore della curvatura ultima attraverso l'angolo α rappresentato dall'inclinazione dall'asse neutro rispetto all'orizzontale come mostrato in Figura 1. In un problema di pressoflessione deviata, la posizione dell'asse neutro e la sua inclinazione rispetto all'orizzontale possono essere determinate mediante la risoluzione di due equazioni non lineari: la prima di equilibrio tra lo sforzo normale sollecitante e lo sforzo normale interno (ottenuto come integrale del campo tensionale sull'intera sezione); la seconda di uguaglianza

tra l'inclinazione del piano della sollecitazione esterna $\beta = tg^{-1} \frac{M_{Sx}}{M_{Sy}}$ (con M_{Sx} ed M_{Sy} pari

rispettivamente al momento sollecitante lungo l'asse x e l'asse y) e l'inclinazione del piano di

sollecitazione interno, $\beta_{int.} = tg^{-1} \frac{M_{y,g}}{M_{x,g}}$ (con $M_{y,g}$ ed $M_{x,g}$ pari rispettivamente al momento

flettente rispetto agli assi baricentrici x ed y dovuti al campo tensionale presente nella sezione).

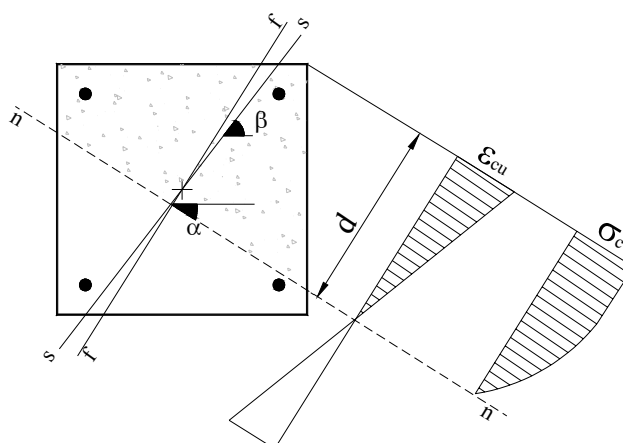


Figura 1. Sezione soggetta a pressoflessione deviata.

Una volta definita la posizione dell'asse neutro (profondità, d , ed inclinazione, α), la curvatura ultima della sezione e le sue componenti sono immediatamente determinabili mediante le seguenti espressioni:

$$\phi_{ult.} = \frac{\epsilon_{cu}}{d}; \quad \phi_x = \phi_{ult.} \sin \alpha; \quad \phi_y = \phi_{ult.} \cos \alpha \quad (1)$$

Assegnato un valore dello sforzo normale agente sulla sezione è possibile allora determinare tutti i punti rappresentativi della capacità di deformazione ultima della sezione; con riferimento ad una sezione quadrata armata in modo simmetrico, si riportano in Figura 2 i domini di curvatura ultima per valori crescenti di sforzo normale adimensionalizzato

$\nu = \frac{N}{A_c \cdot f_c}$ (dove con A_c e f_c si indicano rispettivamente l'area e la resistenza a compressione del calcestruzzo). Ogni punto di tale dominio corrisponde ad una posizione dell'asse neutro sulla sezione analizzata ed in particolare ad una inclinazione, α pari a $\text{tg}^{-1} \phi_x / \phi_y$.

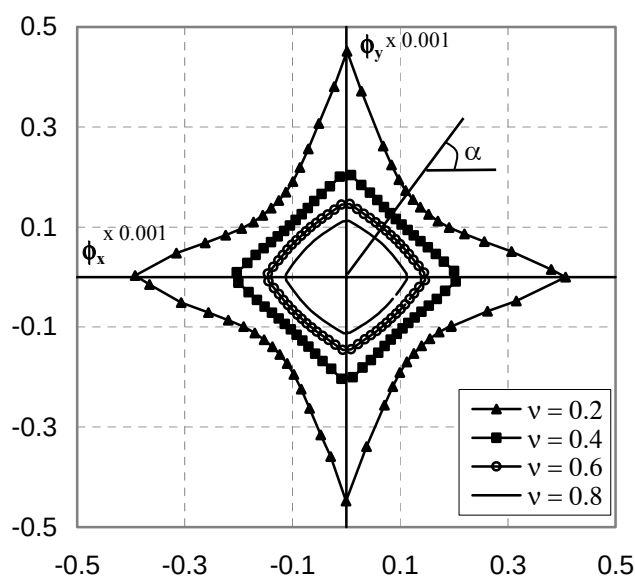


Figura 2. Dominio delle curvature.

I domini riportati in Figura 2 mostrano che, al crescere di ν , i valori della curvatura ultima si riducono sensibilmente; ciò è facilmente intuibile se si pensa che al crescere di ν la regione di

sezione compressa deve aumentare per garantire l'equilibrio alla traslazione. Tale tendenza, evidente nel caso di pressoflessione retta, trova conferma anche per azioni di pressoflessione deviata.

Le curve riportate in Figura 2 mostrano, inoltre, che la concavità dei domini varia al variare di v . In particolare, essa è rivolta verso l'origine degli assi cartesiani per sforzi normali alti e verso l'esterno per sforzi normali più bassi; ciò implica che i domini corrispondenti a valori di v bassi sono caratterizzati da componenti di curvatura ultima ϕ_x e ϕ_y sensibilmente inferiori ai valori di curvatura ultima in condizione di presso flessione retta già a partire da condizioni di sollecitazione che si discostano poco da essa. La rappresentazione grafica delle curvature ultime proposta in Figura 2 è legata alla inclinazione dell'asse neutro, α , e non è direttamente correlata all'angolo di sollecitazione esterna, β . I domini riportati in Figura 2, pertanto, pur fornendo l'insieme di valori di curvatura ultima della sezione in esame, non consentono di risalire in modo diretto allo stato di sollecitazione (espresso dal rapporto M_{sx}/M_{sy}) cui lo specifico valore di curvatura ultima corrisponde, a meno che non si conosca la relazione che lega β con α . Nel caso di pressoflessione deviata, infatti, gli angoli α e β non coincidono in quanto l'asse neutro non risulta essere più ortogonale rispetto all'asse di sollecitazione. Da tali considerazioni consegue, dunque, che una più utile rappresentazione dei domini può essere ottenuta esprimendo le curvature ultime direttamente in funzione dell'angolo di sollecitazione esterna β .

In tale ottica, si presentano nel prosieguo i domini di curvatura ultima derivanti da un'analisi numerica condotta su sezioni quadrate in c.a. di dimensione di base variabile tra $L=30\text{cm}\div 40\text{cm}$ ed aventi caratteristiche meccaniche dei materiali, calcestruzzo ed acciaio, che rientrano in un range di valori tipicamente riscontrabili nelle strutture esistenti. In particolare, si sono presi in considerazione valori di resistenza a compressione del calcestruzzo variabili nel range $f_c = 10\text{ MPa}\div 30\text{ MPa}$, e tensioni di snervamento per le barre di armatura $f_y = 330\text{ MPa}\div 430\text{ MPa}$ (Verderame et al. 2001). Tali sezioni sono state inoltre distinte in funzione della percentuale geometrica di armatura, ρ , variabile tra il 5‰ ed il 12‰; l'armatura totale è stata distribuita secondo due logiche: 4 barre d'angolo, o 8 distribuite lungo il perimetro.

Di ciascuna sezione, per diversi valori dello sforzo normale sollecitante e dell'angolo di sollecitazione esterna, β , è stata valutata la curvatura ultima in regime di pressoflessione retta e deviata utilizzando un programma di calcolo a fibre (Di Ludovico et al. 2007).

In Figura 3 sono riportate, con riferimento a tutte le sezioni analizzate, i valori della curvatura ultima sulle ascisse ($\phi_{ult} = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}$) e dello sforzo normale adimensionalizzato v sulle ordinate, con riferimento sia al caso di pressoflessione retta che deviata ($\beta=0^\circ; \beta=15^\circ; \beta=30^\circ; \beta=45^\circ$); la simmetria delle sezioni in esame consente di analizzare i casi di pressoflessione deviata nel solo range $\beta=0\div 45^\circ$.

Le curve riportate sono in ogni caso caratterizzate da un primo ramo curvilineo (per valori di $v=0\div 0.5$) con pendenza variabile in funzione sia delle caratteristiche geometriche e meccaniche delle sezioni sia dell'angolo di sollecitazione esterna β , e da un secondo ramo pressochè lineare (per $v>0.5$) in cui i domini relativi alle diverse sezioni assumono valori molto prossimi tra loro. Analizzando il tratto curvilineo dei domini è, inoltre, possibile affermare che nel passaggio dal regime uniassiale al regime biassiale si rileva una graduale diminuzione della variabilità della curvatura ultima con le proprietà geometrico meccaniche delle sezioni, fino al caso $\beta=45^\circ$ in cui le curve relative alle sezioni analizzate sono all'incirca sovrapposte, a meno del primo tratto ($v=0\div 0.1$).

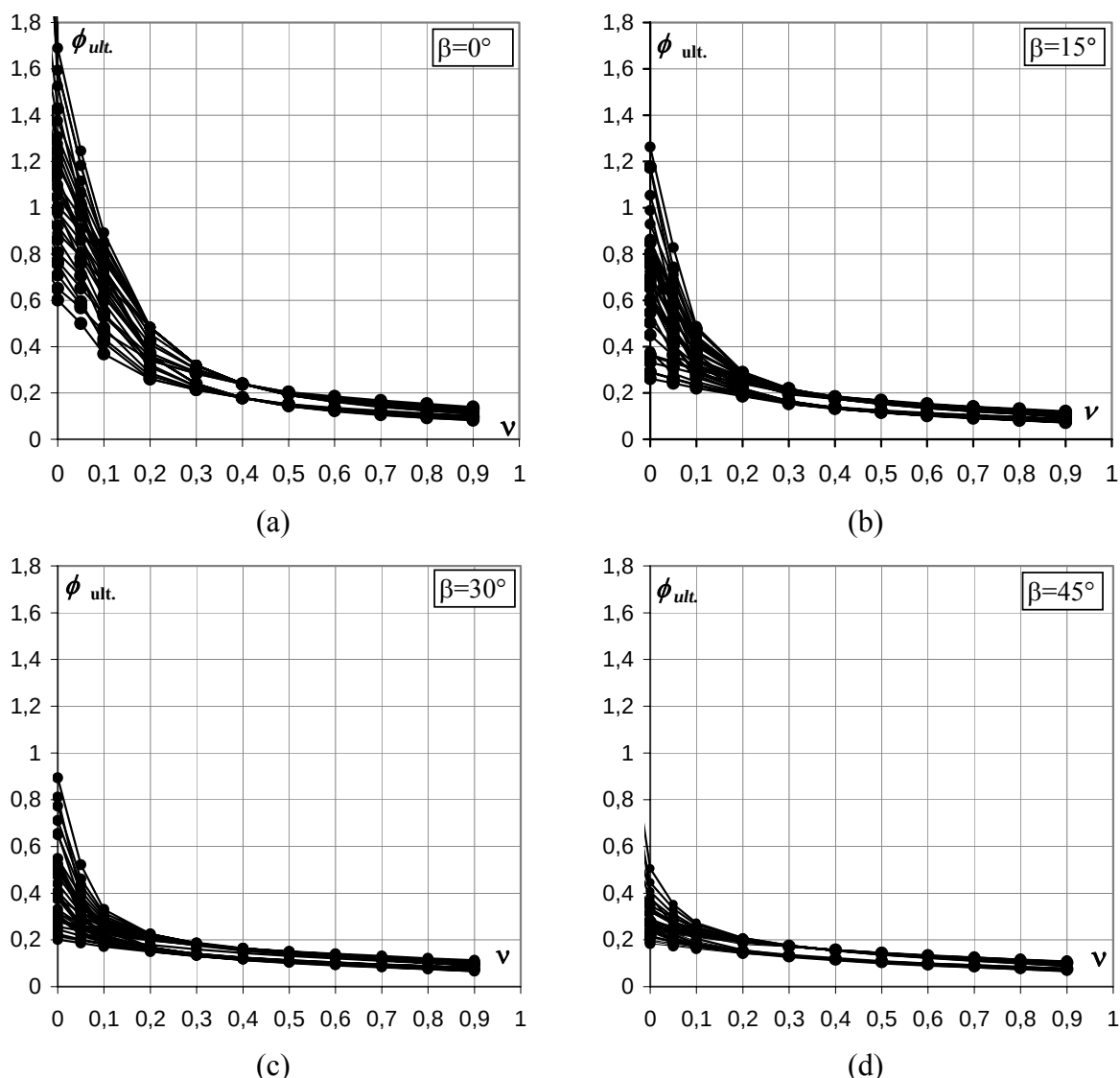


Figura 3. Curve ν - Φ - (a) $\beta=0^\circ$, (b) $\beta=15^\circ$; (c) $\beta=30^\circ$; (d) $\beta=45^\circ$.

Al fine di analizzare più in dettaglio l'incidenza dell'angolo di sollecitazione esterna, β , sul valore delle curvature ultime, si riportano in Figura 4 (a) i domini di curvatura riferiti ad una singola sezione ($L=30\text{cm}$, $f_c = 30 \text{ MPa}$, $f_y = 430 \text{ MPa}$, $\rho = 5\%$). Le curve riportate mostrano chiaramente che i valori di curvatura ultima sono all'incirca uguali al variare di β per $\nu > 0.5$, mentre risultano sensibilmente diversi all'aumentare di β per $\nu < 0.5$. I minimi valori di curvatura ultima, si ottengono, inoltre, in ogni caso in corrispondenza di $\beta=45^\circ$ con scarti tra curvatura ultima in regime uniassiale ed in regime biassiale che aumentano al tendere di ν a 0. In Figura 4 (b) sono inoltre rappresentati, con riferimento alla stessa sezione, gli andamenti delle curvature ultime al variare di β , per prefissati valori di ν . La figura mostra che le curvature ultime variano con l'angolo di sollecitazione attraverso una legge pseudo-parabolica; le parabole sono caratterizzate da frecce via via decrescenti all'aumentare di ν . Dall'analisi di tali curve emerge che noti i valori di curvatura ultima della sezione per $\beta=0^\circ$ e $\beta=45^\circ$, ovvero i valori di curvatura minima e massima della sezione (a $\nu=\text{costante}$), è possibile prevedere il dominio di capacità deformativa della sezione attraverso la definizione di una curva interpolante passante per tali punti. Nella parte II della presente memoria, pertanto, si presenteranno formulazioni semplificate mirate in primo luogo alla valutazione della curvatura ultima per $\beta=0^\circ$ e $\beta=45^\circ$ al variare di ν , per poi passare alla determinazione di

una curva interpolante, passante per i punti $A=(\beta=0^\circ, \phi_{ult.}^0)$ e $B=(\beta=45^\circ, \phi_{ult.}^{45})$, in grado di approssimare al meglio l'intero dominio $\phi_{ult.} - \beta$.

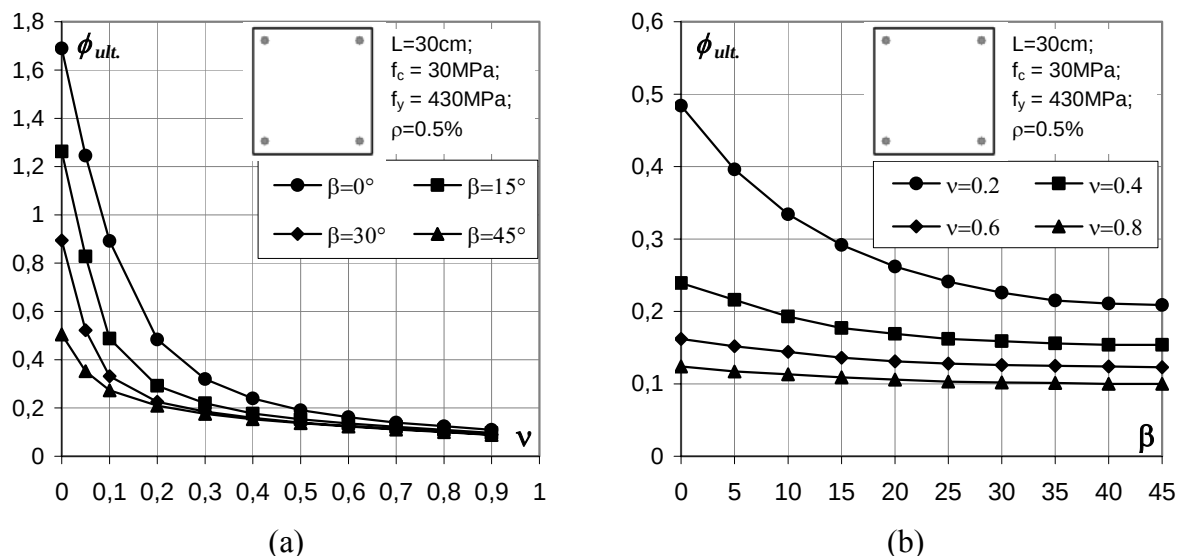


Figura 4. Domini di curvatura $\phi_{ult.}-v$ (a); $\phi_{ult.}-\beta$ (b).

3 RIDUZIONE DI CURVATURA ULTIMA DA REGIME UNIASSIALE A BIASSIALE

I domini di curvatura illustrati nei precedenti paragrafi hanno consentito di valutare l'incidenza di diversi parametri sulla capacità deformativa di una sezione in c.a.; al fine di valutare adesso quanto il passaggio da regime uniassiale a biassiale incida in termini percentuali sulla riduzione di curvatura ultima della sezione, è possibile analizzare come varia con β e v il rapporto tra la curvatura ultima in presso flessione deviata e quella in presso

flessione retta, definito come $\eta = \frac{\phi_{bia}}{\phi_{uni}}$.

In Figura 5, pertanto, è riportato un tipico andamento della superficie tridimensionale $\eta-\beta-v$ nella quale i valori del rapporto η sono riportati sull'asse verticale (tale superficie è riferita ad un caso di sezione in c.a. quadrata armata simmetricamente). E' evidente che per valori alti di v la differenza di curvatura ultima in presso flessione retta ed in presso flessione deviata è limitata, ovvero il valore di η è prossimo all'unità. Al contrario, per valori bassi di v tale abbattimento diventa rilevante. Le riduzioni di curvatura ultima possono essere meglio apprezzate riportando in un unico diagramma le curve $\eta-v$ ottenute come sezioni della superficie $\eta-\beta-v$ con piani a β costante come riportato in Figura 6 (a). Tali curve mostrano chiaramente che le riduzioni di curvatura ultima dovute ad azioni di presso flessione deviata si accentuano man mano che aumenta l'angolo di sollecitazione esterna β , fino a raggiungere valori massimi per valori di $\beta = 45^\circ$. E' evidente che in termini assoluti gran parte della riduzione di curvatura avviene nell'intervallo $0^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$.

Tutte le curve mostrate in Figura 6 (a) sono, inoltre, caratterizzate da un primo ramo decrescente (nel range di $v = 0 \div 0.1$) per poi proseguire con un tratto fortemente crescente ($v = 0.1 \div 0.5$) ed un ultimo tratto pseudo-costante.

In Figura 6 (b) sono riportate, inoltre, le curve che si ottengono attraverso sezioni della superficie tridimensionale $\eta-\beta-v$ con piani a v costante; tali curve mostrano un andamento di tipo parabolico con frecce crescenti al diminuire di v .

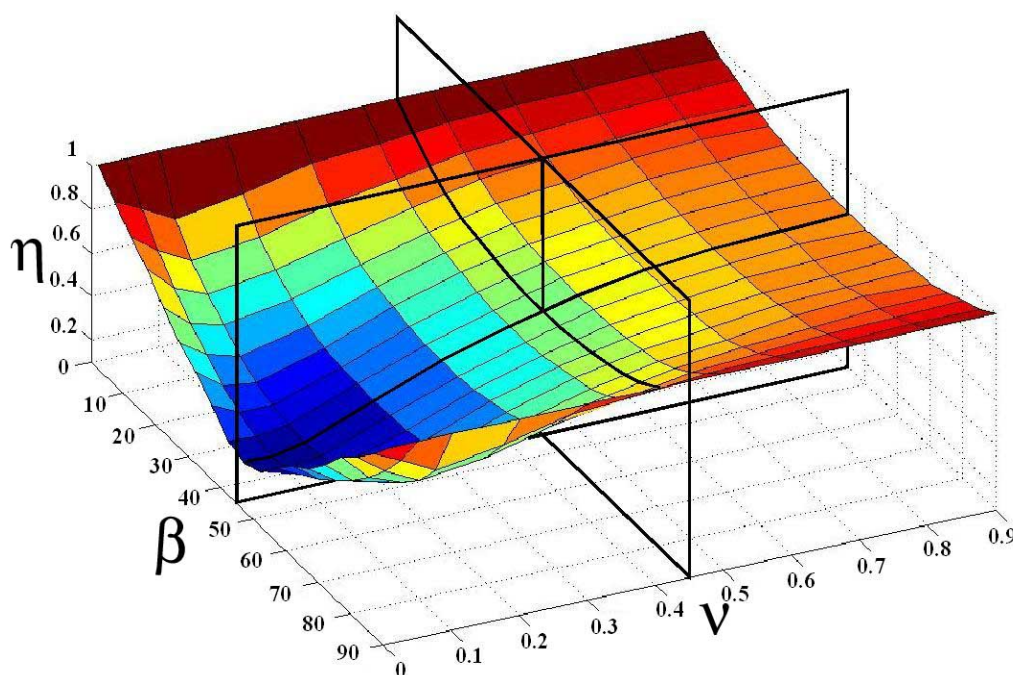
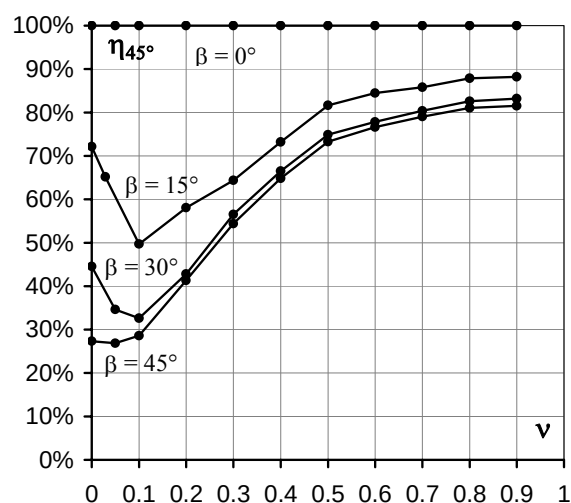
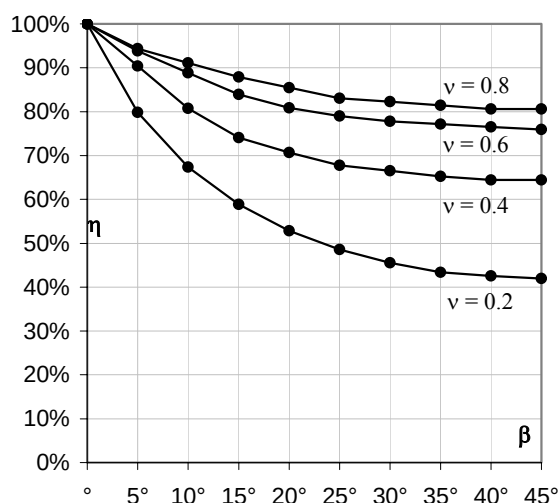


Figura 5. Superficie tridimensionale η - β - v (a); diagramma η - v per β costante (b); diagramma η - β per v costante



(a)



(b)

Figura 6. (a) Curve η_{45} - v , (b) Curve η - β .

In Figura 7, infine, sono riportate, per tutte le sezioni analizzate nel paragrafo precedente, e per il solo valore di $\beta=45^\circ$, per cui si hanno le massime riduzioni di curvatura ultima, gli andamenti delle curve η_{45} - v ; le sezioni armate con 4 ferri sono riportate in Figura 7 (a), quelle armate con 8 ferri sono invece riportate in Figura 7 (b).

Dalle curve si evince che nelle sezioni armate con 8 ferri le curve rappresentative della riduzione di curvatura ultima risultano essere maggiormente influenzate dalle proprietà geometriche e meccaniche della sezione; in ogni caso, l'influenza di tali parametri è più accentuata nel range di valori di $v \leq 0.3$, assumendo la massima variabilità per sollecitazioni di flessione pura.

I valori di η_{45} sono minimi proprio in tale range di v , tipicamente riscontrabile nei pilastri di edifici esistenti, e raggiungono valori pari anche al 20% (riduzione di curvatura ultima nel passaggio da presso flessione retta a deviata pari all'80%). Ciò conferma di quanto sia

necessario valutare l'incidenza della presso flessione deviata nella determinazione della curvatura ultima al fine di una corretta valutazione della capacità di spostamento delle strutture esistenti.

E' interessante notare che tutte le sezioni analizzate presentano in corrispondenza di $v=0.4$ uno stesso valore di η_{45} all'incirca pari al 65%. A partire da tale valore di v , infine, si ha ancora un andamento crescente delle curve ma con pendenza nettamente inferiore; per v elevati le curve hanno un andamento molto simile e si attestano su un valore di η_{45} pari a circa l'80% per valori di v prossimi all'unità.

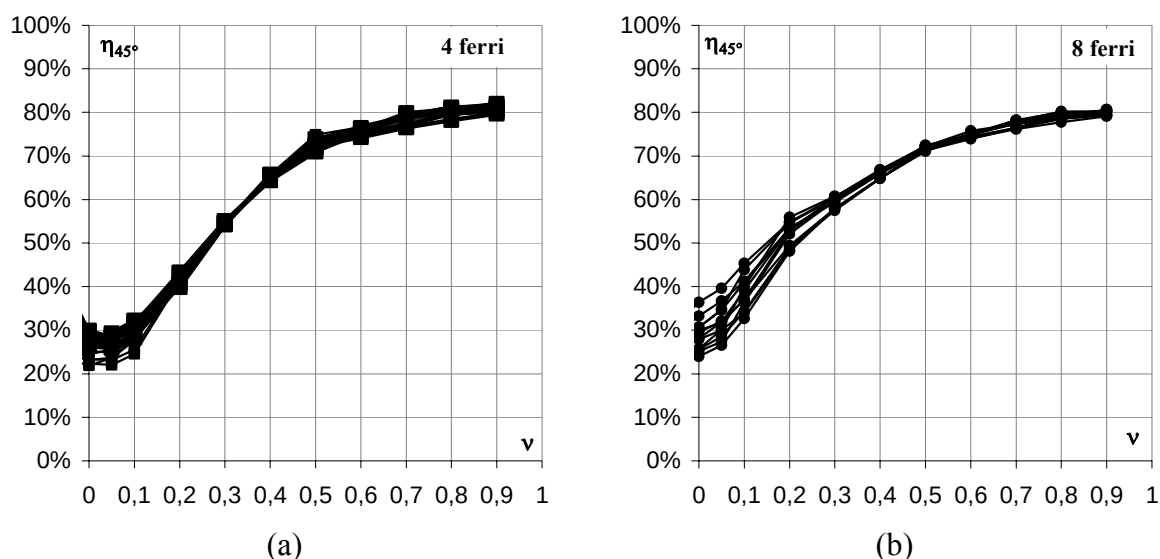


Figura 7. Curve η - v per $\beta = 45^\circ$

La rappresentazione delle curvature ultime in regime biassiale attraverso il rapporto η risulta essere molto incisiva e comoda in quanto fornisce immediatamente un'indicazione chiara sulla perdita di capacità deformativa indotta dal regime deviato della presso flessione; l'andamento delle curve riportate in Figura 7 mostra, tuttavia, che, specie per $\beta=45^\circ$, le curve η_{45} - v sono significativamente influenzate dal numero di ferri di armatura della sezione oltre a non essere, in ogni caso, facilmente riproducibili mediante un'unica funzione in tutto il campo di v . Tale considerazione ha indotto a ritenere più opportuno mettere a punto formulazioni semplificate mirate alla determinazione della curvatura ultima in regime biassiale in grado di fornire direttamente ϕ_{ult} , come descritto nella seconda parte della presente memoria.

4 CONCLUSIONI

Nella presente memoria sono presentati i domini di curvatura ultima, ottenuti con l'ausilio di un programma a fibre, relativi a sezioni quadrate caratterizzate da dimensioni e proprietà meccaniche tipicamente riscontrabili negli edifici esistenti. Dalle analisi svolte è emerso, in primo luogo, che una più facile interpretazione di tali domini si ottiene correlando i valori di curvatura ultima all'angolo di sollecitazione esterna β .

Con riferimento alle sezioni analizzate, i domini di curvatura hanno messo in luce che:

- I valori di curvatura ultima sia in presso flessione retta che deviata risultano poco variabili con le caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione per valori di $v > 0.5$ risultando, invece, molto variabili con esse per bassi valori di sforzo normale adimensionalizzato, specie nel caso di presso flessione retta;

- Il massimo gradiente in curvatura ultima biassiale si registra nell'intervallo $0^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ ed i valori minimi di curvatura ultima si hanno in corrispondenza di $\beta=45^\circ$;
- Il rapporto tra curvatura ultima in regime biassiale ed uniassiale, η , è minimo nel range di sforzo normale adimensionalizzato $v=0 \div 0.2$ e per $\beta=45^\circ$.

5 RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare l'ing. Valentina James per il lavoro svolto durante la sua tesi di laurea in relazione all'argomento in oggetto.

Il presente lavoro è stato sviluppato nell'ambito delle attività di ricerca della "Rete dei Laboratori Universitari di Ingegneria Sismica – ReLUIS" finanziato dal Dipartimento di Protezione Civile – Progetto Esecutivo 2005-2008.

6 BIBLIOGRAFIA

Presidenza del Consiglio dei Ministri "Norme Tecniche per il progetto la verifica e l'adeguamento sismico degli edifici" O.P.C.M. 3274 del 3/05/05.

Ministero dei Lavori Pubblici "Supplemento Ordinario alla Gazzetta Ufficiale del 4/02/2008" D.M. 14/01/2008

Verderame G.M., Stella A., Cosenza E. "Le proprietà meccaniche degli acciai impiegati nelle strutture in c.a. realizzati negli anni '60" *X Congresso Nazionale ANIDIS "L'ingegneria Sismica in Italia"*, Potenza-Matera, 9-13 settembre 2001.

Di Ludovico, M., Lignola, G. P., Prota, A., Cosenza E. "Analisi non lineare di sezioni in c.a. soggette a pressoflessione deviata" *Atti del XII Convegno Ingegneria Sismica in Italia ANIDIS 2007*, , PISA 10-14 giugno 2007.